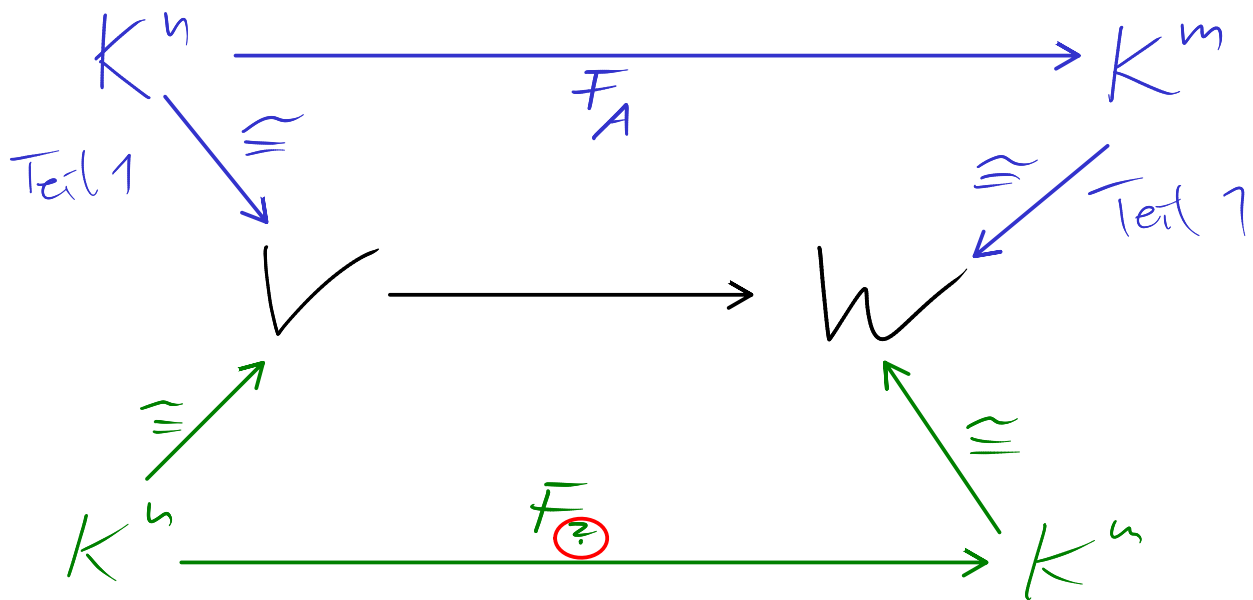


Teil 2: lineare \cong $n \times m$ -Matrizen
 Abb.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_A & \leftrightarrow & A \\ \mathbb{F} & \mapsto & M(\mathbb{F}) \end{array} \quad \left(\mathbb{F}_{M(\mathbb{F})} = \mathbb{F} \right)$$



Basis muss gewählt werden

„ K^n “ bedeutet in der Regel:

K^n mit Standardbasis e_1, \dots, e_n

Allgemeine VR haben keine Standardbasis.

Def: Ist $\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ eine
 (3.6.2) Basis von V , nennen wir
 den Isomorphismus

$$\Phi_{\mathcal{B}}: K^n \xrightarrow{\cong} V$$

$$\sum x_i \underline{e}_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_i x_i \cdot \underline{b}_i$$

aus Hauptsatz (Vorlesung 16)
 das durch \mathcal{B} bestimmte
Koordinatensystem von V .

Notiz: Für $V = K^n$ ist eine Basis/
 ein Koordinatensystem dasselbe
 wie eine invertierbare
 $n \times n$ -Matrix.

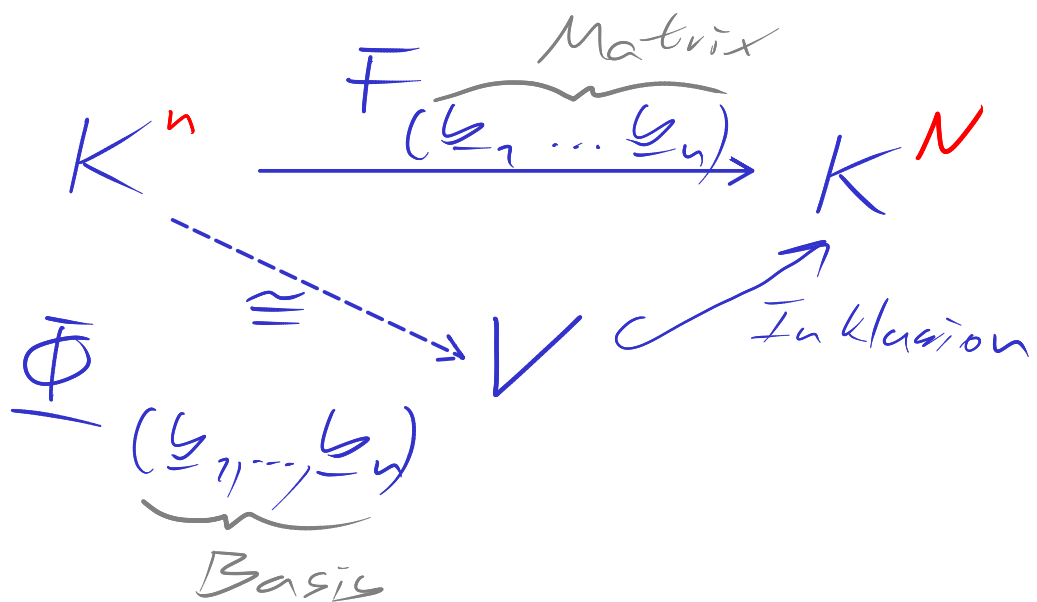
$$\underbrace{\Phi}_{\text{Basis}}(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n) = \underbrace{F}_{\text{Matrix}}(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n): K^n \rightarrow \underbrace{K^n}_{\text{Matrix}}$$

(\rightarrow Vorlesung 19, letzter Satz)

Für einen n -dimensionalen
 UVR $V \subset K^N$ ($N \geq n$)
 ist eine Basis / ein Koordinatensystem dasselbe wie
 eine $N \times n$ Matrix
 $(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$

mit $\underline{b}_i \in V$

und $\text{Rang}(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n) = n$
 (voller Spaltenrang)



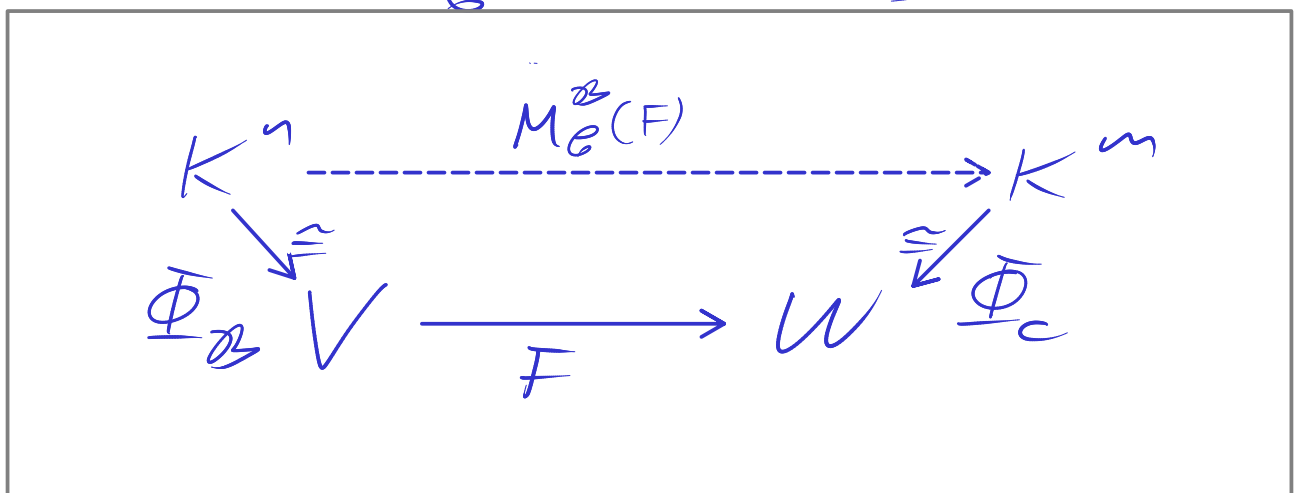
Def.: $F: V \longrightarrow W$ lineare Abbildung
 (3.4.2) \mathcal{B} endliche Basis von V
 \mathcal{C} endliche Basis von W

Die F darstellende Matrix
bezüglich \mathcal{B} und \mathcal{C}

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F)$$

ist die darstellende Matrix
 der Komposition

$$\Phi_{\mathcal{C}}^{-1} \circ F \circ \Phi_{\mathcal{B}}$$



Notiz: Die Koeffizienten von
 $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = (a_{ij})_{i,j}$

sind eindeutig bestimmt durch die Gleichungen

$$F(b_j) = \sum_i m_{ij} c_i$$

Die j -te Spalte von $M_B^C(F)$ beschreibt das Bild des j -ten Basisvektors.

Satz: V, W K -VR
(3.4.2) $\dim V = n$, $\dim W = m$
Für jede Wahl von Basen B, C von V, W definiert

$$M(m \times n; K) \leftarrow \text{Hom}_K(V, W)$$

$$M_B^C(F) \leftarrow F$$

ein Isomorphismus von K -VR.

Rezept: Basiswechsel für lineare
(3.6.5) Abbildungen zwischen UVR
der Standardräume.

$V \subset K^N$ UVR der Dimension $n (\leq N)$

$W \subset K^M$ UVR der Dimension $m (\leq M)$

$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basen von V } Basisvektoren je-
 $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ Basen von W } weils gegeben als
Vektoren in K^N .
bzw. K^M

$F: V \longrightarrow W$ lineare Abbildung

$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F)$ darstellende Matrix

Ziel: Berechnung von
 $M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(F)$

SCHRITT 1:

Fasse $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ auf als $N \times n$ -Matrizen B, B'
 $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ auf als $M \times m$ -Matrizen C, C'

$$F_B = \tilde{i} \circ \tilde{\Phi}_B$$

$$F_C = \tilde{j} \circ \tilde{\Phi}_C$$

$$F_{B'} = \tilde{z} \circ \tilde{\Phi}_{B'}$$

$$F_{C'} = \tilde{j} \circ \tilde{\Phi}_{C'}$$

SCHRITT 2: Finde Linksinverse

$$L_B \text{ zu } B \quad (\text{also } L_B \cdot B = E_n)$$

$$L_{C'} \text{ zu } C' \quad (\text{also } L_{C'} \cdot C' = E_m)$$

z.B. mit Rezept aus Vorlesung 19.

SCHRITT 3:

$$M_{e'}^{B'}(F) = L_{C'} \cdot C \cdot \underbrace{M_e^B(F)} \cdot L_B \cdot B'$$

FERTIG.