Teil 2: lineare Abb. $\hat{=}$ $n \times m$-Matrizen

$$F_A \leftarrow A \qquad \left(F_{M(F)} = F\right)$$
$$F \mapsto M(F)$$

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rr, "F_A"] \arrow[d, "\cong", "\text{Teil 1}"'] & & K^m \arrow[d, "\cong"', "\text{Teil 1}"] \\
V \arrow[rr] & & W \\
K^n \arrow[u, "\cong"] \arrow[rr, "F_{?}"] & & K^n \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

⚠ Basis muss <u>gewählt</u> werden

„K^n" bedeutet in der Regel:

K^n mit Standardbasis $e_1, \dots, e_n$

Allgemeine VR haben keine Standardbasis.

Def: Ist $\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n)$ eine
(3.6.2) Basis von V, nennen wir den Isomorphismus

$$\Phi_{\mathcal{B}} : K^n \xrightarrow{\cong} V$$

$$\sum x_i \underline{e}_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \sum_i x_i \cdot \underline{b}_i$$

aus Hauptsatz (Vorlesung 16)
das durch $\mathcal{B}$ bestimmte Koordinatensystem von V.

Notiz: Für $V = K^n$ ist eine Basis/ein Koordinatensystem dasselbe wie eine invertierbare $n \times n$-Matrix.

$$\Phi_{\underbrace{(\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n)}_{\text{Basis}}} = F_{\underbrace{(\underline{b}_1 \ldots \underline{b}_n)}_{\text{Matrix}}} : K^n \longrightarrow K^n$$

(→ Vorlesung 19 letzter Satz)

Für einen n-dimensionalen UVR $V \subset K^N$ $(N \geq n)$ ist eine Basis/ein Koordinatensystem dasselbe wie eine $N \times n$ Matrix

$$(\underline{b}_1, \dots \underline{b}_n)$$

mit $\underline{b}_i \in V$
und $\operatorname{Rang}(\underline{b}_1 \dots \underline{b}_n) = n$
(voller Spaltenrang)

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rr, "F_{\overbrace{(\underline{b}_1 \dots \underline{b}_n)}^{\text{Matrix}}}"] \arrow[dr, dashed, "\cong", "\Phi_{\underbrace{(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)}_{\text{Basis}}}"'] & & K^N \\
& V \arrow[ur, hook, "\text{Inklusion}"'] &
\end{tikzcd}$$

Def. (3.4.2): $F : V \longrightarrow W$ lineare Abbildung

$\mathcal{B}$ endliche Basis von V

$\mathcal{C}$ endliche Basis von W

Die <u>F darstellende Matrix bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$</u>

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F)$$

Ist die darstellende Matrix der Komposition

$$\Phi_{\mathcal{C}}^{-1} \circ F \circ \Phi_{\mathcal{B}} .$$

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rrr, dashed, "M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F)"] \arrow[d, "\cong", "\Phi_{\mathcal{B}}"'] & & & K^m \arrow[d, "\cong"', "\Phi_{\mathcal{C}}"] \\
V \arrow[rrr, "F"'] & & & W
\end{tikzcd}$$

Notiz: Die Koeffizienten von

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = (m_{ij})_{i,j}$$

sind eindeutig bestimmt durch die Gleichungen

$$F(b_j) = \sum_i m_{ij} c_i$$

Die j-te Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F)$ beschreibt das Bild des j-ten Basisvektors.

Satz: (3.4.2) V, W K-VR, $\dim V = n$, $\dim W = m$

Für jede Wahl von Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ von V, W definiert

$$M(m \times n; K) \leftarrow \mathrm{Hom}_K(V, W)$$

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) \leftarrow\!\shortmid F$$

ein Isomorphismus von K-VR.

Rezept: Basiswechsel für lineare Abbildungen zwischen UVR der Standardräume:
(3.6.5)

$V \subset K^N$ UVR der Dimension $n \, (\leq N)$

$W \subset K^M$ UVR der Dimension $m \, (\leq M)$

$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basen von V
$\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ Basen von W
} Basisvektoren jeweils gegeben als Vektoren in K^N bzw. K^M.

$F: V \longrightarrow W$ lineare Abbildung

$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(F)$ darstellende Matrix

Ziel: Berechnung von $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(F)$

SCHRITT 1:

Fasse $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ auf als $N \times n$-Matrizen B, B'
$\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ auf als $M \times m$-Matrizen C, C'

$F_B = i \circ \Phi_{\mathcal{B}}$ $\qquad$ $F_C = j \circ \Phi_{\mathcal{C}}$

$$\boxed{F_{B'} = i \circ \Phi_{B'}} \qquad F_{C'} = j \circ \Phi_{C'}$$

SCHRITT 2: Finde Linksinverse

L_B zu B (also $L_B \cdot B = E_n$)

$L_{C'}$ zu C' (also $L_{C'} \cdot C' = E_m$)

z.B. mit Rezept aus Vorlesung 19.

SCHRITT 3:

$$M_{C'}^{B'}(F) = L_{C'} \cdot C \cdot \underbrace{M_C^B(F)} \cdot L_B \cdot B'$$

FERTIG.